NICOLAE CRAINIC

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

INSTITUTUL EUROPEAN
2011

CUPRINS

CAPITOLUL 1

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

În acest capitol, vom prezenta o restructurare-extindere a unor noţiuni de liceu necesare la definirea noţiunilor de algebră liniară, presupunând a fi cunoscută teoria mulţimilor şi a funcţiilor.

1.1. Permutări, aranjamente şi combinări

În prima parte a acestui paragraf, vom prezenta cele necesare pentru a putea răspunde la următoarele tipuri de probleme:

Problema 1. În câte moduri se pot aranja pe un raft 3 cărţi? Dar n obiecte oarecare?

Problema 2. În câte moduri se pot aşeza 2 persoane pe trei locuri? Dar k obiecte oarecare pe n locuri?

Problema 3. Câte comisii, de câte 3 membri fiecare, se pot alege dintr-un colectiv de 5 persoane? Dar dacă numărul membrilor din comisie este k, iar colectivul de selecţie are n persoane?

Pentru aceasta, vom da definiţii, propoziţii, teoreme şi vom stabili formule de calcul.

Definiţia 1.1.1. *O mulţime A cu n elemente se numeşte ordonată, dacă există bijecţia*

$$f:\{1,2,...,n\}\to A,\ k\to f(k),$$

$(\forall)\ k=\overline{1,n}$.

În baza acestei definiţii, fiecare număr de la 1 la n se asociază cu un element al mulţimii A şi reciproc.

Dacă $\{i_1,i_2,...,i_n\}=\{1,2,...,n\}$, iar $f(k)\overset{\text{not}}{=}a_{i_k}$, $k\in\{1,2,...,n\}$, atunci $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, iar mulţimea ordonată A rezultată ca efect a definiţiei precedente se notează

$$(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n}). \tag{1.1.1}$$

Prin urmare, poziţia (locul) de rang k din mulţimea ordonată A, din notaţia anterioară, este ocupată de elementul a_{i_k}, $k \in \{1,2,...,n\}$.

Definiţia 1.1.2. *O mulţime ordonată formată cu cele n elemente ale unei mulţimi se numeşte permutare a acelei mulţimi sau permutare de n elemente.*

În acest moment, următoarea propoziţie este evidentă.

Propoziţia 1.1.1. *Mulţimea ordonată*

$$(i_1, i_2, ..., i_n) \tag{1.1.2}$$

formată cu elementele mulţimii $\{1,2,...,n\}$ este o permutare de n elemente, dacă şi numai dacă există bijecţia

$$\sigma : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}, k \to \sigma(k) = i_k,$$

notată

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}. \tag{1.1.3}$$

Observaţia 1.1.1. (1) *Din cele prezentate anterior, rezultă că prin permutare de n elemente putem înţelege, fie mulţimea ordonată din relaţia (1.1.2), fie bijecţia din relaţia (1.1.3).*

(2) *Prin permutare de 0 elemente înţelegem, prin convenţie, mulţimea ordonată cu zero elemente, adică mulţimta vidă.*

(3) *Ca funcţii, permutările se notează cu $\sigma, \tau, ..., \sigma_1, \sigma_2...$.*

(4) *Mulţimea permutărilor de n elemente se notează cu S_n, iar numărul acestora cu P_n, deci $|S_n| = P_n$ ($|S_n|$ fiind cardinalul mulţimii S_n).*

Din cele prezentate anterior, rezultă că variante favorabile problemei 1 sunt permutări de 3, respectiv n elemente, iar soluţia acestei probleme este numărul permutărilor de 3, respectiv n elemente, adică numerele P_3 şi P_n.

Definiţia 1.1.3. *Submulţimile ordonate*

$$(i_1, i_2, ..., i_k) \tag{1.1.4}$$

ale mulţimii $\{1,2,...,n\}$ se numesc aranjamente de n elemente luate câte k.

Acum, este evidentă propoziţia care urmează.

Propoziţia 1.1.2. *Submulţimile ordonate* $(i_1, i_2, ..., i_k)$ *ale mulţimii* $\{1, 2, ..., n\}$ *sunt aranjamente de n elemente luate câte k, dacă şi numai dacă există funcţiile injective*

$$f : \{1, 2, ..., k\} \to \{1, 2, ..., n\},\ t \to f(i_t), \tag{1.1.5}$$

$(\forall) t = \overline{1, k}$.

Observaţia 1.1.2. (1) *Prin aranjamente de n elemente luate câte k, vom înţelege, fie submulţimile ordonate date la (1.1.4), fie funcţiile injective date la (1.1.5).*

(2) *Din definiţia şi propoziţia precedentă, rezultă* $k \leq n$. *Pentru* $k = n$, *rezultă aranjamente de n elemente luate câte n, adică permutări de n elemente.*

(3) *Prin aranjamente de n elemente luate câte* 0, *convenim să înţelegem mulţimea vidă, aceasta fiind o submulţime ordonată a oricărei mulţimi.*

(4) *Vom nota cu* A_n^k *numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k.*

În acest moment, variante favorabile problemei 2 sunt submulţimi ordonate de câte 2, respectiv *k* locuri ce se pot face cu cele 3, respectiv *n* locuri, iar soluţiile problemi sunt numerele A_3^2 şi A_n^k.

Definiţia 1.1.4. *Submulţimile* $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ *ale mulţimii* $\{1, 2, ..., n\}$ *se numesc combinări de n elemente luate câte k.*

Observaţia 1.1.3. (1) *Din definiţia precedentă, rezultă* $k \leq n$. *Pentru* $k = n$, *rezultă combinări de n elemente luate câte n, adică mulţimea însăşi* $\{i_1, i_2, ..., i_n\} = \{1, 2, ..., n\}$.

(2) *Prin combinări de n element luate câte* 0, *convenim să înţelegem submulţimea vidă.*

(3) *Vom nota* C_n^k *sau* $\binom{n}{k}$, *numărul combinărilor de n elemente luate câte k.*

Răspunsul la problema 3 este numărul sbmulţimilor de câte 3, respectiv *k* membri ce se pot face cu cele 5, respectiv *n* persoane, adică numerele C_5^3 şi C_n^k.

În cele ce urmează, vom folosi

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k \overset{\text{notaţie}}{=} n!,\ 0! \overset{\text{convenţie}}{=} 1, \tag{1.1.6}$$

unde $n!$ se citeşte *"n factorial"*.

Teorema 1.1.3. *Dacă P_n, A_n^k şi C_n^k sunt numerele permutărilor de n elemente, aranjamentelor şi combinărilor de n elemente luate câte k, atunci*

(1) $P_n = n!$,

(2) $A_n^k = n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, $1 \leq k \leq n$, $A_n^0 = 1$ *şi*

(3) $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_n}$, $0 \leq k \leq n$.

DEMONSTRAŢIE. (1) Ţinând seama de observaţia 1.1.1 şi de relaţia (1.1.6), avem $P_0 = 0! = 1$. Pentru $n \geq 1$, vom demonstra formula dată prin metoda inducţiei matematice. Totoadată, pentru exemplificare, vom da o formulare completă a acestei demonstraţii. Pentru aceasta, fie propoziţia dependentă de n

$$P(n) : P_n = n!,\ n \geq 1.$$

I. Etapa de verificare. În această etapă, verificăm propoziţia $P(n)$ pentru cea mai mică valoare a lui n, adică

$$P(1) : P_1 = 1! = 1.$$

Deoarece cu o mulţime cu un element se poate face o mulţime ordonată, rezultă că $P_1 = 1$, ca urmare propoziţia $P(1)$ este adevărată.

II. Etapa de demonstraţie. În această etapă, considerăm P_n adevărată şi demonstrăm că este adevărată

$$P(n+1) : P_{n+1} = (n+1)!.$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că $P_{n+1} = (n+1)P_n$. Cum fiecare permutare de n elemente generează, prin adăugarea celui de-al $(n+1)$-lea element, $(n+1)$ permutări cu $(n+1)$ elemente, rezultă că cele P_n permutări generează $(n+1)P_n = P_{n+1}$ permutări cu $(n+1)$ elemente. Dar $P_n = n!$, astfel că

$$P_{n+1} = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Din I şi II, rezultă, conform principiului inducţiei matematice, că propoziţia $P(n)$ este adevărată $(\forall)\ n \geq 1$.

(2) Dacă ţinem seama de observaţia 1.1.2 şi de relaţia (1.1.6), rezultă că $A_n^0 = 1$, iar $A_n^n = P_n = n!$.

Pentru $1 \leq k < n$, vom demonstra formula dată prin metoda inducţiei matematice după numărul natural k.

Pentru $k = 1$, obţinem $A_n^1 = n$- egalitate adevărată, având în vedere că se pot forma n submulţimi ordonate ale lui A cu câte un element fiecare.

Pentru un k oarecare, $k < n$, este suficient să arătăm că

$$A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k.$$

Într-adevăr, ca să repartizăm oricare $(k+1)$ elemente, luate din n elemente date, pentru $(k+1)$ locuri se pot lua, mai întâi, oricare k elemente şi aranja pe primele k locuri. Aceasta se poate face în A_n^k moduri. În fiecare din aceste cazuri, rămân $(n-k)$ elemente. Oricare dintre aceste elemente se poate pune pe al $(k+1)$-lea loc. Astfel, în fiecare dintre cele A_n^k moduri de aranjare a elementelor pe primele k locuri, obţinem $(n-k)$ posibilităţi prin care al $(k+1)$-lea loc este ocupat de unul din cele $(n-k)$ elemente rămase. Rezultă că $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$.

(3) Ştim că numărul submulţimilor ordonate ale mulţimii $\{1,2,...,k\}$, cu câte k elemente fiecare este A_n^k. Cum numărul submulţimilor lui $\{1,2,...,n\}$ cu câte k elemente fiecare, este egal cu C_n^k şi cum fiecare dintre acestea se pot ordona în P_k moduri, rezultă că $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, de unde şi formula din enunţul teoremei. □

Răspunsuri finale: la **Problema 1** este $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, respectiv $P_n = n!$, la **Problema 2** este $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$, respectiv $A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, iar la **Problema 3** este $C_5^3 = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$, respectiv $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Alte formule utile (cu factoriali) pentru calculul numerlor A_n^k şi C_n^k, precum şi cele mai uzuale formule de calcul, vor fi cuprinse în propoziţia care urmează.

Propoziţia 1.1.4. *Dacă P_n, A_n^k şi C_n^k sunt numerele, permutărilor de n elemente, aranjamentelor şi combinărilor de n elemente luate câte k, atunci au loc formulele:*

(1) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $0 \le k \le n$,

(2) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$,

(3) $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \le k \le n$ *(formula combinărilor complementare) şi*

(4) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $1 \le k < n$ *(formulă de recurenţă).*

DEMONSTRAŢIE. (1) Folosind teorema 1.1.3, obţinem succesiv:

$$A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(2) Aici, conform aceleeaşi teoreme 1.1.3 şi formulei precedente, obţinem

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Formulele de la (3) şi (4), rezultă imediat, folosind formula precedentă. Astfel, pentru ultima formulă, obţinem:

$$C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=$$
$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}=$$
$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k.$$

□

1.2. Formula polinomului

Teorema 1.2.1. *1. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k \tag{1.2.1}$$

(formula binomului lui Newton).

2. Dacă $a_1,a_2,\dots,a_k\in\mathbb{R}$, atunci

$$(a_1+a_2+\dots+a_k)^n=\sum\frac{n!}{p_1!p_2!\dots p_k!}a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_k^{p_k}, \tag{1.2.2}$$

unde suma se extinde asupra tuturor numerelor naturale $p_1,p_2,\dots,p_k$ care verifică relaţia

$$p_1+p_2+\dots+p_k=n$$

(formula polinomului).

Mai întâi, vom face câteva precizări cuprinse în observaţia care urmează.

Observaţia 1.2.1. (1) *Formula explicită a binomului este*

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\dots+C_n^ka^{n-k}b^k+\dots+C_n^nb^n$$

(2) *Coeficienţii $C_n^0,C_n^1,\dots,C_n^n$ din dezvoltarea binomului se numesc coeficienţi binominali.*

(3) *Folosind formula (3) de la teorema 1.1.4, rezultă că elementele mulţimii ordonate $(C_n^0,C_n^1,\dots,C_n^n)$ (coeficienţii binomiali ai termenilor dezvoltării) egal depărtate de extreme sunt egale.*

(4) *Dacă la formula binomului substituim* $n-k=p \Leftrightarrow k+p=n$, *iar pentru combinări folosim formula cu factoriali, atunci această formulă ia forma*

$$(a+b)^n = \sum_{p+k=n} \frac{n!}{p!k!} a^p b^k, \tag{1.2.3}$$

de unde şi generalizarea acesteia la formula polinomului.

Revenim cu demonstraţia teoremei enunţate anterior.

DEMONSTRAŢIE. 1. Această formulă, rezultă prin inducţie matematică după k, astfel că

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = \\
&= (a+b)(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n) = \\
&= (C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \ldots + C_n^n a b^n) + \\
&\quad +(C_n^0 a^n b + \ldots + C_n^{n-1} a b^n + C_n^n b^{n+1}) = \\
&= C_n^0 a^{n+1} + (C_n^1 + C_n^0) a^n b + \ldots + (C_n^n + C_n^{n-1}) a b^n + C_n^n b^{n+1} = \\
&= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \ldots + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1},
\end{aligned}$$

unde am folosit relaţia de recurenţă (4), de la propoziţia 1.1.4 şi egalităţile

$$C_n^0 = C_{n+1}^{n+1}; \quad C_n^n = C_{n+1}^{n+1}.$$

2. Demonstraţia formulei polinomului, rezultă tot prin inducţie matematică după k, folosind formula binomului.

Pentru $k=2$, rezultă formula

$$(a_1+a_2)^n = \sum_{p_1+p_2=n} \frac{n!}{p_1!p_2!} a^{p_1} a^{p_2},$$

echivalentă cu forma (1.2.3) a binomului, deci adevărată.

Presupunem adevărată formula pentru k termeni şi demonstrăm că este adevărată pentru $k+1$ termeni, adică:

$$(a_1+\ldots+a_k+a_{k+1})^n = \sum_{p_1+\ldots+p_k+p_{k+1}=n} \frac{n!}{p_1!\ldots p_k! p_{k+1}!} a_1^{p_1} \ldots a_k^{p_k} a_{k+1}^{p_{k+1}}.$$

Notând

$$a_1+\ldots+a_k \overset{not}{=} A, \ p_1+\ldots+p_k \overset{not}{=} q,$$

rezultă, conform formulei (1.2.3), că:

$$(a_1+\ldots+a_k+a_{k+1})^n = (A+a_{k+1})^n = \sum_{q+p_{k+1}=n} \frac{n!}{q!p_{k+1}!} A^q a_{k+1}^{p_{k+1}}.$$

Cum

$$A^q = (a_1 + ... + a_k)^q = \sum_{p_1+...+p_k=q} \frac{q!}{p_1!...p_k!} a_1^{p_1}...a_k^{p_k}$$

(am presupus că formula este adevărată pentru k termeni), rezultă că

$$(a_1 + ... + a_k + a_{k+1})^n =$$

$$= \sum_{q+p_{k+1}=n} \frac{n!}{q!p_{k+1}!} \left(\sum_{p_1+...+p_k=q} \frac{q!}{p_1!...p_k!} a_1^{p_1}...a_k^{p_k} \right) a_{k+1}^{p_{k+1}} =$$

$$= \sum_{q+p_{k+1}=n} \sum_{p_1+...+p_k=q} \frac{n!}{p_1!...p_k p_{k+1}!} a_1^{p_1}...a_k^{p_k} a_{k+1}^{p_{k+1}} =$$

$$= \sum_{p_1+...+p_k+p_{k+1}=n} \frac{n!}{p_1!...p_k!p_{k+1}!} a_1^{p_1}...a_k^{p_k} a_{k+1}^{p_{k+1}},$$

adică ceea ce ne-am propus să demonstrăm.

□

Exemplu. Vom stabili o formulă de calcul pentru expresia

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2.$$

Pentru $n = 2$, formula polinomului devine

$$(a_1 + ... + a_k)^2 = \sum_{p_1+...+p_n=2} \frac{2!}{p_1!p_2!...p_k!} a_1^{p_1} a_2^{p_2}...a_k^{p_k}.$$

Pentru termenii acestei dezvoltări, avem posibilităţile următoare:

1.

1.1. $p_1 = 2$, $p_2 = ... = p_k = 0$, situaţie în temenul dezvoltării devine

$$\frac{2!}{2!\cdot 0!\cdot ...\cdot 0!} a_1^2 a_2^0...a_k^0 = a_1^2,$$

1.2. $p_2 = 2$ şi $p_1 = p_3 = ... = p_k = 0$, rezultând termenul

$$\frac{2!}{0!\cdot 2!\cdot ...\cdot 0!} a_1^0 a_2^2...a_k^0 = a_2^2$$

şi aşa mai departe,

1.3. $p_k = 2$ şi $p_1 = p_2 = ... = p_{k-1} = 0$, rezultând termenul

$$\frac{2!}{0!\cdot ...\cdot 2!0!} a_1^0...a_{k-1}^0 a_k^2 = a_k^2.$$

2.

2.1. $p_1 = p_2 = 1$ şi $p_3 = p_4 = ... = p_k = 0$, rezultând termenul

$$\frac{2!}{1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot ...\cdot 0!} a_1^1 a_2^1 a_3^0...a_k^0 = 2a_1a_2,$$

2.2. $p_1 = p_3 = 1$ şi $p_2 = p_4 = ... = p_k = 0$, rezultând termenul

$$\frac{2!}{1! \cdot 0! \cdot 1! \cdot ... \cdot 0!} a_1^1 a_2^0 a_3^1 ... a_k^0 = 2a_1 a_3$$

şi aşa mai departe.

Prin urmare, dezvoltarea expresiei din enunţ conţine suma a k pătrate

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

şi suma

$$2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_k + ... + a_{k-1}a_k) = 2 \sum_{i,j=1, i<j}^{k} a_i a_j$$

cu C_k^2 termeni.

În final, rezultă

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_k + ... + a_{k-1}a_k).$$

1.3. Operaţii cu permutări

În cele ce urmează, vom prezenta unele noţiuni referitoare la permutări ca funcţii bijective.

Am văzut că

$$\sigma \in S_n \Leftrightarrow \sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\},\ k \to \sigma(k),$$

notată

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}. \tag{1.3.1}$$

Deoarece pemutările de n elemente sunt nişte funcţii, respectiv funcţii bijective, atunci au loc precizările care urmează.

1. Două permutări $\sigma, \tau \in S_n$ sunt egale, adică

$$\sigma = \tau \in S_n \Leftrightarrow \sigma(k) = \tau(k), (\forall) k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

2. Două sau mai multe permutări de n elemente se pot compune (înmulţi). Astfel, dacă $\sigma, \tau \in S_n$, cu

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \tau(1) & \tau(2) & ... & \tau(n) \end{pmatrix},$$

atunci, având în vedere că $(\sigma\tau)(k) = (\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$,

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}. \tag{1.3.2}$$

De asemenea, compunerea permutărilor este asociativă şi anticomutativă.

3. Există elementul neutru faţă de operaţia de înmulţire a permutărilor şi anume *permutarea identică*:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \tag{1.3.3}$$

care verifică proprietatea $e\sigma = \sigma e = \sigma$, $(\forall)\sigma \in S_n$.

4. Orice permutare de n elemente este inversabilă: $(\forall)\sigma \in S_n$, $(\exists)\sigma^{-1} \in S_n$ (inversa permutării σ), astfel încât $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = e$.

Rezultă că $\sigma^{-1}(\sigma(k)) = k$, $(\forall)k \in S_n$, deci $(\forall)\sigma \in S_n$, avem

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(\sigma(1)) & \sigma^{-1}(\sigma(2)) & \dots & \sigma^{-1}(\sigma(n)) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \tag{1.3.4}$$

cu specificaţia că elementele lui σ^{-1} de pe prima line se aşează în ordine crescătoare.

Exemplu. Dacă $\sigma, \tau \in S_4$, cu

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

atunci

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \sigma(\tau(4)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(2) & \sigma(4) & \sigma(1) & \sigma(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} \tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \tau(\sigma(4)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau(3) & \tau(4) & \tau(1) & \tau(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$